Sur la résolution numérique des Systèmes d'équations linéaires.

A. Cholesky

La solution des problèmes dépendant de données expérimentales, qui peuvent dans certains cas être soumises à des conditions, et auxquelles on applique la méthode des moindres carrés est toujours subordonnée au calcul numérique des racines d'un système d'équations linéaires. C'est le cas de la recherche des lois physiques ; c'est aussi le cas de la compensation des réseaux géodésiques. Il est donc intéressant de rechercher un moyen aussi simple que possible d'effectuer la résolution numérique d'un système d'équations linéaires.

Le procédé que nous allons indiquer s'applique aux systèmes d'équations symétriques auxquels conduit la méthode des moindres carrés, mais nous remarquerons tout d'abord que la résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues peut très facilement se ramener à la résolution d'un système de n équations linéaires symétrique à n inconnues.

Considérons en effet le système suivant :

$$\text{I}\quad\begin{cases} \alpha_1^1\gamma_1+\alpha_2^1\gamma_2+\alpha_3^1\gamma_3+\text{———}+\alpha_n^1\gamma_n+C_1=0\\ \alpha_1^2\gamma_1+\alpha_2^2\gamma_2+\alpha_3^2\gamma_3+\text{———}+\alpha_n^2\gamma_n+C_2=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_1^n\gamma_1+\alpha_2^n\gamma_2+\text{———}+\alpha_n^n\gamma_n+C_n=0 \end{cases}$$

Effectuons la transformation linéaire représentée par le système :

$$\text{II}\quad\begin{cases} \gamma_1=\alpha_1^1\lambda_1+\alpha_1^2\lambda_2+\text{——}+\alpha_1^n\lambda_n\\ \gamma_2=\alpha_2^1\lambda_1+\alpha_2^2\lambda_2+\text{——}+\alpha_2^n\lambda_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_n=\alpha_n^1\lambda_1+\alpha_n^2\lambda_2+\text{——}+\alpha_n^n\lambda_n \end{cases}$$

Le système d'équations I donnant les n inconnues γ se trouve remplacé par le système III donnant les n inconnues λ permettant à l'aide de II de calculer les valeurs des γ.

$$\text{III}\quad\begin{cases} A_1^1\lambda_1+A_2^1\lambda_2+\text{——}+A_n^1\lambda_n+C_1=0\\ A_1^2\lambda_1+A_2^2\lambda_2+\text{——}+A_n^2\lambda_n+C_2=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_1^n\lambda_1+A_2^n\lambda_2+\text{——}+A_n^n\lambda_n+C_n=0 \end{cases}$$

On a d'une façon générale.

$$\text{IV)}\quad \begin{aligned} A_p^p &= \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_k^p)^2 \\ A_p^q &= \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k^p \alpha_k^q \end{aligned}$$

Le coefficient A_p^q est obtenu en faisant le produit des coefficients des lignes p et q du système 1 qui se trouvent dans la même colonne et en faisant la somme des produits ainsi obtenus dans les n colonnes, ce qu'on peut exprimer symboliquement en disant que A_p^q est le produit de la ligne p par la ligne q.

L'ordre des facteurs pouvant être renversé dans chaque produit, on voit immédiatement que

$$A_p^q = A_q^p$$

dans le déterminant du système III les termes symétriques par rapport à la diagonale sont égaux, autrement dit le système d'équations aux λ est symétrique.

Proposons-nous donc de résoudre un système d'équations de la forme III.

Remarquons d'après ce qui précède que le système d'équations II si l'on y supposait les γ connus serait un système d'équations aux λ équivalent au système III. On aurait donc ~~immé~~ un moyen de résoudre le système III si l'on pouvait trouver un système I permettant de calculer facilement les γ.

C'est ce qui arrive si dans le système I la première équation ~~ne~~ contient seulement ~~γ~~ γ_1,

la 2ème ———— γ_1 et γ_2

la 3ème ———— γ_1, γ_2 et γ_3

ainsi de suite. On peut en effet calculer ainsi tous les γ successivement à partir de γ_1.

Le problème est donc ramené à la recherche du système

$$\text{V)}\quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1^1 \gamma_1 & + c_1 = 0 \\ \alpha_1^2 \gamma_1 + \alpha_2^2 \gamma_2 & + c_2 = 0 \\ \alpha_1^3 \gamma_1 + \alpha_2^3 \gamma_2 + \alpha_3^3 \gamma_3 & + c_3 = 0 \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_1^n \gamma_1 + \alpha_2^n \gamma_2 + \alpha_3^n \gamma_3 + \cdots & + \alpha_n^n \gamma_n + c_n = 0 \end{array} \right.$$

Ce système étant en effet trouvé le problème devient très facile puisque le système II est remplacé par le système VI qui permet de calculer les λ de proche en proche à partir de λ_n.

$$\text{VI)}\quad \begin{cases} \alpha_1^1\lambda_1 + \alpha_1^2\lambda_2 + \cdots + \alpha_1^n\lambda_n - \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2^2\lambda_2 + \alpha_2^3\lambda_3 \cdots + \alpha_2^n\lambda_n - \gamma_2 = 0 \\ \alpha_3^3\lambda_3 \cdots + \alpha_3^n\lambda_n - \gamma_3 = 0 \\ \cdots\cdots \\ \alpha_n^n\lambda_n - \gamma_n = 0 \end{cases}$$

Nous calculerons facilement les coefficients α en partant des coefficients A du système III, en appliquant les relations générales IV) au système V. On voit ainsi qu'on peut calculer ligne par ligne tous les coefficients du système VI

1ère ligne
$$\begin{cases} A_1^1 = (\alpha_1^1)^2 \\ A_2^1 = \alpha_1^1\alpha_1^2 \\ A_p^1 = \alpha_1^1\alpha_1^p \\ A_n^1 = \alpha_1^1\alpha_1^n \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} \alpha_1^1 &= \sqrt{A_1^1} \\ \alpha_1^2 &= \frac{A_2^1}{\alpha_1^1} \\ \alpha_1^p &= \frac{A_p^1}{\alpha_1^1} \\ \alpha_1^n &= \frac{A_n^1}{\alpha_1^1} \end{aligned}$$

2ème ligne
les α_1 sont déjà connus par le calcul de la 1ère ligne
$$\begin{cases} A_2^2 = (\alpha_1^2)^2 + (\alpha_2^2)^2 \\ A_3^2 = \alpha_1^2\alpha_1^3 + \alpha_2^2\alpha_2^3 \\ A_p^2 = \alpha_1^2\alpha_1^p + \alpha_2^2\alpha_2^p \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha_2^2 &= \sqrt{A_2^2 - (\alpha_1^2)^2} \\ \alpha_2^3 &= \frac{A_3^2 - \alpha_1^2\alpha_1^3}{\alpha_2^2} \\ \alpha_2^p &= \frac{A_p^2 - \alpha_1^2\alpha_1^p}{\alpha_2^2} \end{aligned}$$

pème ligne
Tous les α dont l'indice inférieur est plus petit que p sont connus par le calcul des lignes précédentes.
$$\begin{cases} A_p^p = (\alpha_1^p)^2 + (\alpha_2^p)^2 + (\alpha_3^p)^2 + \cdots + (\alpha_{p-1}^p)^2 + (\alpha_p^p)^2 \\ A_p^q = \alpha_1^p\alpha_1^q + \alpha_2^p\alpha_2^q + \alpha_3^p\alpha_3^q + \cdots + \alpha_{p-1}^p\alpha_{p-1}^q + \alpha_p^p\alpha_p^q \\ q > p \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha_p^p &= \sqrt{A_p^p - (\alpha_1^p)^2 - (\alpha_2^p)^2 - \cdots - (\alpha_{p-1}^p)^2} \\ \alpha_p^q &= \frac{A_p^q - \alpha_1^p\alpha_1^q - \alpha_2^p\alpha_2^q - \cdots - \alpha_{p-1}^p\alpha_{p-1}^q}{\alpha_p^p} \end{aligned}$$

Quant au calcul des γ il s'effectue facilement à l'aide des équations V. On obtient.

$$(-\gamma_1) = \frac{C_1}{\alpha_1^1}$$
$$(-\gamma_2) = \frac{C_2 - \alpha_1^2(-\gamma_1)}{\alpha_2^2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$(-\gamma_p) = \frac{C_p - \alpha_1^p(-\gamma_1) - \alpha_2^p(-\gamma_2) - \cdots}{\alpha_p^p}$$

Ce qui montre que les coefficients $(-\gamma)$ qui figurent dans le tableau des équations VI) se calculent par rapport aux ~~coefficient~~ termes constants C du tableau III exactement de la même façon que les coefficients α par rapport aux A.

Les calculs peuvent être disposés d'une façon commode en un seul tableau. Les équations données étant symétriques, il suffit d'écrire dans le tableau les coefficients d'un seul côté de la diagonale, en-dessus par exemple.

Les équations transformées du système VI peuvent alors être disposées en dessous de la diagonale symétriquement placées par rapport aux équations données, chaque nouvelle équation occupant une colonne en dessous de la diagonale.

Les écritures se bornent à la transcription des coefficients α; en effet le calcul d'un coefficient α de la forme $\frac{\Sigma' mn}{K}$ est effectué sur la machine à calculer à l'aide d'une série de multiplications qui s'ajoutent automatiquement et algébriquement sur la machine, la somme algébrique étant immédiatement divisée par K. On utilise ainsi l'opération la plus compliquée que puisse faire la machine à calculer, par suite on obtient le rendement maximum de cette machine, tout en se mettant autant que possible à l'abri des fautes fréquentes dans les transcriptions de chiffres.

On trouve, tant dans la disposition des calculs, que dans l'emploi de la machine à calculer, des simplifications pour l'application des formules ou des indications précieuses. Donnons un seul exemple : les machines à calculer du genre « Dactyle » enregistrent le quotient [redacted] en chiffres blancs ou rouges suivant que la division [redacted] est faite en tournant dans le sens de l'addition ou de la soustraction, il s'ensuit [redacted] que tout coefficient α étant le résultat d'une division sur la machine, son signe est [redacted] indiqué par la couleur des chiffres qui le composent ; les erreurs de signe sont ainsi facilement évitées.

Il paraît inutile d'insister sur le reste de la résolution, c'est-à-dire sur le calcul des λ à l'aide du système VI). On voit en effet immédiatement comment on peut remonter successivement de λ_n à λ_{n-1}, puis à λ_{n-2} et ainsi de suite jusqu'à λ_1.

On peut mettre en évidence les avantages de cette méthode de résolution des systèmes linéaires, au point de vue de l'approximation avec laquelle les résultats sont obtenus.

Toute méthode de résolution doit nécessairement conduire à un système d'équations du genre du système VI permettant d'obtenir directement une des inconnues et de déterminer successivement toutes les autres. Supposons qu'on ait été conduit au système :

$$\text{VII}\begin{cases}\delta_1^1\lambda_1+\delta_1^2\lambda_2+\ldots+\delta_1^n\lambda_n-\varepsilon_1=0\\ \qquad\delta_2^2\lambda_2+\ldots+\delta_2^n\lambda_n-\varepsilon_2=0\\ \\ \qquad\qquad\delta_n^n\lambda_n-\varepsilon_n=0\end{cases}$$

on peut faire correspondre à ce système, un second système fournissant les valeurs des ε, soit :

$$\text{VIII}\begin{cases}\beta_1^1\varepsilon_1+C_1=0\\ \beta_1^2\varepsilon_1+\beta_2^2\varepsilon_2+C_2=0\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ \beta_1^n\varepsilon_1+\beta_2^n\varepsilon_2\ \ldots\ +\beta_n^n\varepsilon_n+C_n=0\end{cases}$$

les formules IV sont alors remplacées par les suivantes :

$$A_p^p=\sum_{k=1}^{k=p}\left(\beta_k^p\delta_k^p\right)$$

$$A_p^q=\sum_{k=1}^{k=p}\left(\beta_k^p\delta_k^q\right)$$

D'où l'on peut conclure que le système unique des coefficients α que l'on a employé précédemment est remplacé dans tous les autres modes de résolution par un double système de coefficients β et δ tels que l'on a toujours $\beta_p^q\delta_p^q=\left(\alpha_p^q\right)^2$

Or les calculs s'effectuent nécessairement avec une précision limitée et on est amené pour éviter des ~~erreurs~~ fautes et rendre le calcul aussi simple que possible, à calculer tous les nombres employés avec un nombre de décimales fixe. Il en résulte que les nombres α, β, δ sont affectés d'une erreur η dépendant des décimales négligées et indépendante de la grandeur du nombre calculé.

~~L'emploi~~ de la quantité $(\alpha_p^q)^2$ dans les calculs correspond à l'introduction d'une erreur $2\alpha_p^q.\eta$

L'emploi de la quantité égale $(\beta_p^q\delta_p^q)$ correspond à

l'introduction de l'erreur $(\beta_p^q + \delta_p^q)\eta$.

On sait que le produit $\beta_p^q \delta_p^q$ étant constant la somme de ses deux facteurs atteint son minimum lorsqu'ils sont égaux. L'erreur la plus faible que l'on puisse introduire est donc $2\alpha_p^q \eta$

Il en résulte que le ~~système~~ mode de résolution des systèmes linéaires qui vient d'être exposé apparaît comme celui qui fournit la meilleure approximation de calculs.

Cette propriété qui permet de réduire au strict minimum le nombre des décimales à employer dans les calculs, compense largement le petit inconvénient d'employer la racine carrée dans la résolution d'équations linéaires.

D'autant plus que la racine carrée peut être obtenue facilement et rapidement par l'aide de la machine à calculer par le procédé suivant complètement différent des procédés généralement indiqués par les fabricants de machines à calculer.

Soit à extraire la racine carrée d'un nombre N.

Supposons qu'on connaisse un nombre n voisin de la racine r cherchée.

Soit pour fixer les idées

$$r = n + \varepsilon$$

$$N = r^2 = (n+\varepsilon)^2 = n^2 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2$$

Si ε^2 est d'un ordre inférieur à la dernière décimale que l'on veut calculer, on a le droit d'écrire

$$N = n^2 + 2n\varepsilon = n(n+2\varepsilon)$$

c'est à dire qu'en divisant N par n on a pour quotient $n + 2\varepsilon$

2ε représente l'excès de ce quotient sur le diviseur n et l'on obtient r en ajoutant à n la moitié de cet excès.

Pratiquement, il est avantageux d'avoir à sa disposition une table de carrés qui donne à première vue la racine carrée d'un nombre quelconque avec 3 chiffres significatifs exacts.

$\frac{\varepsilon}{n}$ est alors inférieur à $\frac{1}{10^2}$

$\frac{\varepsilon^2}{n^2}$ ——— $\frac{1}{10^4}$

La première division donne la racine avec 5 chiffres significatifs.

$\frac{\varepsilon^4}{n^4}$ est inférieur à $\frac{1}{10^8}$

donc la 2ème division faite avec la racine à 5 chiffres exacts donnerait 9 chiffres significatifs exacts et ainsi de suite.

On peut énoncer une règle simple en supposant que le nombre comporte une virgule placée à la droite du premier chiffre de gauche. Dans ces conditions chaque division double le nombre des décimales de la racine.

A l'aide de ce procédé, un opérateur exercé obtient en quelques secondes la racine carrée d'un nombre de 5 chiffres avec le même nombre de chiffres exacts.

La méthode de résolution des systèmes linéaires qui vient d'être exposée a été complétée par l'adaptation du système de vérification indiqué par Gauss sous le nom de preuve par sommes.

La vérification est obtenue de la façon suivante : On juxtapose au terme constant C_p de l'équation de rang p un terme V_p donné par la relation $-V_p = A_1^p + A_2^p + \dots + A_n^p + C_p$

Dans ces conditions la somme des nombres inscrits dans la ligne p du système des équations est nulle. Si l'on traite V_p dans la résolution de la même façon que C_p, cette relation linéaire se maintiendra et sera encore vraie pour les coefficients α.

De plus il sera encore possible de vérifier le calcul des λ à partir du système des équations VI), car si l'on remplace dans les équations III les termes constants C par les termes de vérification V, l'opération équivalant à changer λ en $(1-\lambda)$, le calcul des inconnues fait avec les V donnera donc des valeurs λ' telles que $\lambda_p + \lambda'_p = 1$

On peut en opérant comme il vient d'être dit réussir à coup sûr et en peu de temps la résolution de systèmes d'équations très complexes.

La résolution d'un système de 10 équations à 10 inconnues peut être faite ~~[illegible]~~ avec 5 chiffres exacts, en 4 à 5 heures, y compris la vérification des équations et le calcul des résidus.

On a résolu par cette méthode plusieurs systèmes dépassant 30 équations, et en particulier un système de 56 équations. Ce dernier cas fait partie d'un calcul de compensation

des altitudes des chaînes primordiales de la triangulation de l'Algérie. En raison de l'importance des calculs et pour éviter l'encombrement, on a dû adopter une disposition spéciale, mais les calculs ont été conduits exactement comme il vient d'être dit

Vincennes le 2 Décembre 1910

[illegible]